35-6-C-2 3
93

AD

EMINENTISSIMUM ET REVERENDISSIMUM

PRINCIPEM

ANGELUM MARIAM CARDIN. QUIRINUM

S. APOSTOLICÆ SEDIS BIBLIOTHECARIUM
BRIXIÆ EPISCOPUM &c.

EPISTOLA

P. F. FORTUNATI A BRIXIA
Ordin. Min. Ref. Prov. Brixienſis Lect. Theol., & in Brixien. Acad. publ. Matheſeos, ac Naturalis Philoſ. Profeſſoris

IN QUA

Nonnullæ in Prop. 21. lib. VII. Elementorum Euclidis animadverſiones expenduntur.

* * *

Digitized by Google

35 . 4 . C . 2

Digitized by Google

EMINENTISSIMO ET REVERENDISSIMO

PRINCIPI
ANGELO MARIÆ
CARDINALI QUIRINO

S. SEDIS APOSTOLICÆ BIBLIOTHECARIO,
BRIXIÆ EPISCOPO &c.

F. FORTUNATUS A BRIXIA
Ord. Min. Ref. Prov. Brixienſis

F.

DOmeſticæ Tuæ Bibliothecæ libros, quos hic Brixiæ retines, magnæ illius, unde Vaticanam inſigni munificentia adauxiſti, reliquias, quoties inviſo atque evolvo, CARDINALIS AMPLISSIME, eos præ-

94

ſertim curioſis manibus amplector, quos veterum Tuorum in Florentina Abbatia ſtudiorum teſtes, comites ac duces fuiſſe, ex nota eorundem fronti, pro Sacræ Caſinenſis Familiæ more, inſcripta comperio. Quam maxime autem paucis ab hinc diebus admiratus ſum & exoſculatus, utpote qui Mathematicas facultates, ſi quis alius, depereo, Euclidis elementorum volumen, ubi, quot folia impreſſa, totidem alba ſtudio Tuo compacta deprehendi, in quibus nimirum novæ quædam Euclidis propoſitionum demonſtrationes, quod diligentiſſime Tuo calamo præſtitiſti, ad Algorithmi leges apparerent. Volumen illud quo magis manibus verſabam, eo minus oculis meis credebam; namque cum exploratum omnibus ſit, nullum fuiſſe literarum genus, cui vel a teneris annis egregiam operam non impenderis, attamen Te adamaſſe præ cæteris Matheſim, ejuſque intimos receſſus pervaſiſſe, ex edito in eo volumine ſpecimine conjiciebam. Immenſa vero voluptas me cœpit,

pit, dum ſingula a Te in iis foliis deſcripta attente perlegens, incidi in *Propoſitionem* 21. *lib. VII.*, quam haudquaquam contentus nova ea methodo demonſtraſſe, præterea demonſtrationem, qua uſus eſt Euclides, ipſe omnium primus, & uſque hodie ſolus, ceu mancam & imperfectam redarguere non dubitaſti. Cum præclarum hoc facinus detexiſſem, illico omnibus gaudiis geſtiens ad Te convolavi, atque incredibiliter obſtupui, dum ſenſi, a Te rem ipſam ita teneri, perinde ac ſi heri & nudius tertius eidem vacaſſes. Narraſti vero mihi, qua ratione quæſtionem illam eo tempore, viginti ſcilicet quatuor annos vix natus, præſtantiſſimo Mathematico per epiſtolam Florentiæ propoſueris, & qua ratione Vir ille vere eximius propoſitæ quæſtioni pariter per epiſtolam ſatisfecerit; demumque in mandatis mihi dediſti, ut de ea ipſa quæſtione judicium meum ipſe interponerem. Rem difficilem, ut verum fatear, animus meus vehementer refugie-

bat ; at juſſis Tuis non parere piaculum ducens, provinciam tandem ſuſcepi, ſperans, qua benignitate amplexus es *Philoſophiam Senſuum Mechanicam*, quam nuper Tuis ſub auſpiciis evulgavi, eadem Te admiſſurum opellam, quam modo offero. Id unum certe conſequar, ut literarius Orbis miretur ingenii Tui acumen, quo in Mathematicis facultatibus ab ineunte etiam ætate excelluiſti, antequam ſcilicet ſtudia Sacra totum Te ſibi vindicarent, quemadmodum totum modo vindicant, magna Brixianæ urbis utilitate, in qua ſcilicet ita Epiſcopum geris, ut literarum Patronus & Antiſtes æque cenſearis, præſertim cum paucis ab hinc menſibus Græcos typos apud nos inſtitueris, jamque ſub prælo ſudet Veterum Brixianæ Eccleſiæ Patrum Collectio ea papyri, & characterum, nec non ærearum tabularum magnificentia, ut inter ſplendidiores editiones, quibus ætas noſtra gloriatur, & cujuſmodi eſt Romana Operum S. Ephrem Syri Tuo juſſu adornata, lo-

cum

 56

cum eidem ab Eruditis aſſignatum iri in dubium non revocemus. Ita pariter, PRINCEPS EMINENTISSIME, Tuo ſtudio Tuaque munificentia (de qua tantum aliquid delibabo hic breviter; nam ipſe mihi edixiſti, ne laudes, quæ innumeræ profecto ſunt, regiminis Tui Paſtoralis recenſerem) nova Urbis hujus noſtræ Cathedralis inter nobiliora Italiæ Templa locum modo obtinet, utpote quæ octo inſignis magnitudinis, & elegantiæ columnis ad concamerati faſtigii ſuſtentaculum inſtructa jam viſitur; jamque pleraque portio marmorei laquearis ſculptili opere exornati omnium oculos ad ſe rapit; ſuaque nitet in ſede Ara Maxima, quam (Tua ipſa verba uſurpare mihi liceat ex epiſtola nuncupatoria voluminis ſecundi laudatæ editionis S. Ephrem deſumta) ne Romanus cultus in principe ædis parte deſideraretur, Roma una cum Candelabris, & Icone advehendam curaſti; jamque demum perfecto undique Presbyterio, Pontificale Sacrum tertio in ea Baſilica ha-

buiſti: quæ omnia quam cito perfeceris, Brixia mirata eſt, & miratur vehementiſſime: ac proinde ad æternam Poſterorum memoriam in ea ipſa principe parte e regione Throni Epiſcopalis auguſtum tanto Benefactori Septem Virali auctoritate monumentum erexit. Neque vero eximia hæc Tua munificentia intra Cathedralis Brixianæ ambitum continetur, dum eam teſtantur etiam Palatium Epiſcopale undique expolitum, & ſumtuoſis operibus auctum; Villa ſuburbana, S. Euſtachii dicta, ad nitidiorem formam redacta; Saleſianarum Sanctimonialium in Valle Camunica Aſceterium, originem Tibi debens, annuumque proventum; Eccleſia, quæ modo conſtruitur, Patrum Oratorii S. Philippi Ara Magna, & Icone donata. Romæ autem teſtantur Vaticana Bibliotheca, Baſilica & Palatium S. Marci, Templum S. Gregorii in Monte Cœlio, atque in æde ſacra S.Mariæ ſuper Minervam Statua marmorea Sanctiſſimo Pontifici BENEDICTO XIII. ad ejus tumulum erecta.

Te-

 97

Teſtatur inſuper Abbatia Tua Vangadicienſis, in qua & commodum domicilium, quo antea carebat, Commendatariis paraſti, & Clericorum Seminarium, publicaſque Scholas, ad maximum regionis illius bonum, jam paras & inſtruis, nec non ad Templi illius cultum Aram Magnam, & plura alia ornamenta. Teſtatur Caſinenſis Tua Congregatio, cui Commendam S. Andreæ de Buſco Apoſtolicarum literarum præſidio in perpetuum ceſſiſti, cuique certam pecuniæ ſummam ſingulis annis perſolvis pro peregrinis ad Sublacenſe Specu confluentibus. Teſtantur denique Fratres Minores Conventuales Civitatis Caſtellanæ & Auguſtiniani Eremitæ Fori Sempronii, in quorum Eccleſiis grati animi Tui clara extant argumenta, quòd paſſim in montanis utriuſque Ordinis Cœnobiis, dum Romanum via Flaminia iter agis, nocturno frui conſueveris hoſpitio. DEUS OPTIMUS MAXIMUS diu Te ſervet incolumem, ut non Brixiana tantum hæc Diœceſis, ſed univerſus

Chri-

Chriſtianus Orbis magis magiſque & munificentiæ Tuæ, & aliis, quibus fulges, animi dotibus illuſtretur.

Accedo nunc ad imperatum examen, afferamque primo loco (ita enim EMINENTISSIME PRINCEPS juſſiſti) epiſtolam ipſam ſuperius indicatam, quam ſcilicet præſtantiſſimus Matheſeos Profeſſor ad Te conſcripſit; nam exemplar Tuæ ad eundem datæ, rerum Tuarum parcus nimium æſtimator, intercidere paſſus es.

VIRO CLARISSIMO
D. ANGELO MARIÆ QUIRINO
MON. CASINENSI

D. Guido Grandi Mon. Camaldulenſis

S.

QUod, te rogante, ſemel iterumque reſpondi, hoc, te jubente, literis conſignare non abnuo; quid enim nutibus tuis non deferam, qui tali Mathematicas ſcientias ardore proſequeris, quas unice ipſe depereo? Itaque

tuæ

tuæ erga Euclidæam demonſtrationem lib. VII. Prop. 21. Theor. 19. *exceptioni quid reponi poſſe crediderim, ſic candide aperio.*

Probat Euclides loco citato, minimos numeros omnium eamdem cum ipſis rationem habentium æque metiri numeros ipſis proportionales, hoc ratiocinio. Si fuerit A.B (*qui minimi in ſua ratione ſupponantur*) :: C.D, *erit alternando* A.C :: B.D. *ergo* (*per definitionem proportionalium numerorum*) *erunt antecedentes* A, B (*ut pote minores termini proportionis*) *conſequentium* C, D *aut eadem pars, aut eædem partes; quod ſi eædem partes, jam una talium partium ipſius* C *incluſarum in antecedente* A (*puta* O) *ad ipſum* C *eſſet, ut una ſimilium partium ipſius* D *incluſarum in antecedente* B (*puta* P) *ad ipſum* D, *&* *alternando foret* O.P :: D.C :: A.B, *hoc eſt* A.B *non eſſent minimi in ſua ratione contra hypotheſim. Supereſt ergo, ut* A, *&* B *ſint eadem pars ipſorum* C, D, *adeoque ipſos æque metiantur, quod eſt propoſitum.*

Excipis tamen, Vir Clariſſime, & conſequentiam inficiaris, quod A, B *minimi non eſſent in*

ſua

ſua ratione ex quo foret O. P :: C. D; *contendis enim, ſuſpicari quempiam poſſe, an non alteruter numerorum, puta* P, *ſit numerus fractus fractione proprie dicta, ideſt minor unitate; cum evidens ſit, numerum fractum habere poſſe ad integrum illam rationem, quæ inter duos integros reperitur.*

Verum non video, exceptioni hujuſmodi locum eſſe: Quia enim apud Euclidem lib. VII. definit. 2. numerus eſt ex unitatibus compoſita multitudo, *omnis apud Euclidem numerus eſt integer; rurſus cum* definit. 3. *ejuſdem* libri *ſit* pars numerus numeri, minor majoris, cum minor metitur majorem; *&* definit. 4. partes, cum non metitur, *ſequitur omnem partem numeri, aut plures ejus partes eſſe numerum proprie dictum, videlicet integrum. Cum igitur evidenter inferatur ab Euclide in præmiſſa demonſtratione,* A, *&* B *eſſe ipſorum* C, D *vel eandem partem, vel eaſdem partes, profecto quælibet talium partium, ſive* O, *ſive* P *erit numerus integer; neque ſuſpicari quis poterit, eſſe poſſe fractionem proprie dictam. Pars enim cujuſvis numeri juxta terminos ab Euclide de-*

finitos

 98

finitos nunquam minor eſt unitate.

Hæc ſunt, quæ, ut deſiderio tuo facerem ſatis, in hanc rem animadvertere placuit: ſupereſt ut, quo veritatis amore præmiſſæ demonſtrationis examini manum admoviſti, eodem (ſiquidem noſtra reſponſio dubitationi amoliendæ par videatur) ab ipſius impugnatione jam retrahas, & Geometrarum Principi ſuam laudem relinquas, qua per tot ſecula apud omnes Mathematicos ſcriptores conſtantiſſime fruitur; quod ſcilicet abſque omni penitus erroris, aut paralogiſmi nota, elementa ſua conſcripſerit, in quibus etſi majorem nonnulli claritatem, brevitatemve aliquando deſideraverint, vitium tamen nullum, quod veritati, aut ſoliditati ejus demonſtrationum officeret, hactenus eſt deprehenſum. Vale.

Ex Monaſterio Angelorum VIII. Kal. Octobris 1704.

Eſt itaque Euclidis propoſitio: *numeri omnium ſibi proportionalium minimi numeros quoſcunque ſibi proportionales æque metiuntur*, videlicet ſi fuerint duo numeri *a*, *b* in ſua

ra-

Digitized by Google

ratione minimi, tales nimirum, ut in eadem ratione duo alii illis minores dari nequeant, contendit Euclides, fore, ut duo *a*, *b* ceteros omnes, puta *A*, *B*, eandem cum illis rationem habentes, ex æquo metiantur. Duo autem numeri *a*, *b* dicuntur totidem alios *A*, *B* ſibi proportionales ex æquo metiri, cum duo *a*, *b* æque toties ſumti binos alios *A*, *B* adeo explent, ut nihil omnino vel ſuperſit, vel deſit. Sic porro ab Euclide hæc ipſa oſtenditur propoſitio. Cum enim ex hypotheſi habeatur $a . b :: A . B$, erit $a . A :: b . B$(*); cumque jam ſit $a < A$, $b < B$, numeri minimi *a*, *b* erunt partes, & quidem ſimiles, majorum numerorum *A*, *B*. Vel igitur minimi numeri *a*, *b* ſunt partes aliquotæ ſimiles duorum *A*, *B*; vel ſunt eorundem partes aliquantæ. Si primum: dubium non eſt, quin minimi *a*, *b* metiantur ex æquo majores ſibi proportionales *A*, *B*. Quippe in eo poſita eſt natura partium aliquota-
rum

(*) Lib. V. prop. 16.

rum ſimilium, ut æque toties in ſuis totalibus magnitudinibus contineantur, ſeu toties ex æquo ſumtæ illas perfecte adæquent, & plane expleant. Sin alterum: ſumantur ex ipſis minimis numeris a, b duo integri numeri m, n, numerus ſcilicet m ex minimo a, & numerus n ex minimo b; ſintque numeri m, n, minimis a, b ſubducti, partes aliquotæ ſimiles majorum numerorum A, B. Igitur quoniam ob hypotheſim eſt $m.n \asymp A.B$ (*), nec non $a.b \asymp A.B$, erit quoque $m.n \asymp a.b$. Conſtat autem, eſſe $m < a$, $n < b$; cum numeri m, n poſiti fuerint partes duorum a, b. Ergo contra hypotheſim duo numeri a, b non ſunt in ſua ratione minimi. Extant enim hoc ipſo duo alii m, n, qui minores ſunt duobus ipſis a, b, ſimulque eandem cum illis rationem habent. Itaque fieri non poteſt, ut duo a, b ſint in ſua ratione minimi, & ſimul, ſi ad majores ſibi proportionales A, B referantur, partium aliquantarum ſimilium

mu-

(*) Lib. V. prop. 15.

Digitized by Google

munus obeant. Duo ergo numeri *a*, *b* vel non ſunt minimi, vel ſi ſunt minimi, non ſunt partes aliquantæ ſimiles duorum *A*, *B*. Poſiti ſunt autem in ſua ratione minimi. Igitur partes itidem ſunt non aliquantæ, ſed aliquotæ ſimiles duorum ſibi proportionalium *A*, *B*; eoſque proinde, ſicuti etiam eodem jure ceteros omnes, qui ſibi in ſua ratione reſpondent, æque metiuntur.

Quamvis ergo Euclidæum ejuſmodi ratiocinium viſum fuerit Mathematicis omnibus recte concludere, laudatamque propoſitionem ad evidentiam oſtendere, Tibi tamen uni, PRINCEPS SAPIENTISSIME ſufficiens haudquaquam videbatur. Contendebas enim, ſuſpicari poſſe nonneminem, partes aliquotas ſimiles *m*, *n* majorum numerorum *A*, *B* minimis detractas terminis *a*, *b*, integros numeros non eſſe, quemadmodum Euclides in ſua demonſtratione pro certo habet, ſed earum alteram numerum eſſe fractum. Certe cum ea ſit minimorum numerorum indoles,

doles, ut totidem alii integri numeri, qui in eadem ratione illis minores ſint, inveniri nequeant, evidens in eo eſt repugnantia, ut numeri minimi partes ſimiles, quæ integri quoque numeri ſint, complectantur. Contra vero manifeſte conſtat, minimis quibuſcumque numeris, per regulam, quam *auream* dicunt, partes ſimiles ſubduci poſſe, quorum altera integer numerus ſit, altera fractus. Si autem altera harum partium ſimilium, puta *n*, pro fracto numero habeatur, neminem latet, laudatam Euclidis demonſtrationem palmari vitio laborare. Quandoquidem ex eo quod ſit $m . n \asymp a . b$, haud recte profecto deducitur, numeros *a*, *b* contra poſitionem non eſſe in ſua ratione minimos; cum non quicumque numeri minimis minores, ipſiſque proportionales, ſed ii tantum, qui integri ſimul ſunt, minimis ipſis officiant.

Tua porro hæc, CARDINALIS SAPIENTISSIME, animadverſio anſam mihi præbuit, ut Euclidis ratiocinium, loquendo de minimis numeris in genere

Digitized by Google

proportionis *multiplicis*, attentius, quam antea unquam feciſſem, expenderem, atque ad rigidiorem trutinam revocarem. Hinc factum eſt, ut non parum vitioſum mihi quoque videretur. Vel enim, ajebam, in hoc proportionis genere unitas habet rationem minimi termini, adeo nimirum ut minimi numeri in ratione *dupla* ſint 2. 1., in ratione *tripla* 3. 1., &c. vel uterque terminus debet eſſe numerus, prout ab ipſomet Euclide definitur, *multitudo* ſcilicet *ex unitatibus compoſita*. (*) Si primum: Euclidis ratiocinium, loquendo de minimis in hoc proportionis genere, eſt ridiculum, & nihil concludit. Eſt ridiculum; quia, cum ex terminis pateat, unitatem eſſe partem aliquotam integri numeri, ridicula eſt dubitatio de oppoſito; atque adeo locum non habet disjunctiva propoſitio: *numeri minimi aut ſunt partes aliquotæ, aut aliquantæ*; cum veritas prioris membri ex ſola unitatis & numeri notione intellectui evidenter reluceat. Ni-

(*) Lib. VII. def. 2.

102

Nihil vero ratiocinium ipſum concludit; quia, cum neceſſario tunc dicendum ſit, partem aliquotam majoris numeri, minimo termino ſubductam, non eſſe integrum numerum, ſed fractum, utpote quæ nonniſi aliquot unitatis minutias complecti poteſt, ſicuti duo numeri ex eo non deſinunt eſſe in ſua ratione minimi, quod hujuſmodi ſimiles partes contineant, ita ex harum ſimilium partium poſitione, numeros ipſos non amplius eſſe minimos, nonniſi peſſime demonſtratur. Si vero alterum placeat, minimos ſcilicet numeros etiam in genere proportionis *multiplicis* ex pluribus unitatibus neceſſario conſurgere, ſeu utrumque eſſe numerum proprie dictum, negare profecto nemo tunc poſſe videtur, Euclidem in ſuo ratiocinio falli. Etenim cum numeri minimi in ratione *dupla* ſint hoc ipſo 4. 2., atque ex his ſumi queant partes ſimiles, ſcilicet 2. ex termino 4., & 1. ex termino 2., quæ, ut patet, numeros majores 12., *6.* illis proportionales æque me-

tiuntur, quin duo ipſi 4., 2. deſinant eſſe in ſua ratione minimi, non niſi illegitima eſt illatio, qua, ex poſitione harum partium ſimilium, binos numeros 4., 2. minimos in ſua ratione amplius non eſſe infertur. Accedit, minimum utrumque terminum in genere proportionis *multiplicis* eſſe non poſſe multitudinem ex pluribus unitatibus compoſitam, nempe numerum, prout ipſum ſumit Euclides, quin propoſitio ipſa plerumque ſit falſa. Numeri namque 4. 2., qui hac in hypotheſi eſſent minimi in ratione *dupla*, non metiuntur numeros 6. 3., neque binos 10. 5., qui in eadem ratione ſibi reſpondent, ſicuti nec duo 6. 2. minimi in ratione *tripla* metiuntur binos ſibi proportionales 9. 3., neque duo 8. 2. minimi in ratione *quadrupla*, ut alios quamplures caſus omittam, ſunt menſura duorum 12. 3., qui eadem cum illis ratione donantur.

Quam grave negotium contra Euclidis ratiocinium faceſſant hujuſcemodi animadverſiones, nemo non videt. Neque illis

illis ſit ſatis, ſi dicatur cum laudato Viro Cl., *omnem partem numeri*, *aut plures ejus partes* apud Euclidem *eſſe numerum proprie dictum*, ſcilicet *integrum*, ex eo nimirum, quod ſummus ille Geometra *numerum* definiat: *multitudinem ex unitatibus compoſitam* (*); *partem* (aliquotam) vocet *numerum numeri minorem majoris*, *cum minor metitur majorem* (**); contra vero *partes* appellet, *cum non metitur* (***), ſeu cum non eſt pars numeri aliquota, ſed aliquanta. Siquidem licet non inficiar, Euclidem de integris tantummodo numeris eo in loco diſſerere, explicandum tamen eſt, cur noluerit, fractionem eſſe partem numeri, quamvis ſit pars unitatis, quæ ſimul cum aliis, ut ipſe quoque fatetur, integrum quemcunque numerum conſtituit. Determinare itidem oportet, num unitas inter minimos numeros habenda ſit, atque ad Euclide pro altero minimorum terminorum in genere proportionis *multiplicis*

(*) Lib. VII. def. 2.
(**) Ibidem def. 3.
(***) Ibidem def. 4.

Digitized by Google

fuerit habita, an vero a minimorum ſerie, utpote quæ apud Euclidem non eſt numerus, ſed tantum principium numeri, ſit rejicienda. Illud quoque principium oſtendendum videtur, cui Euclidæa demonſtratio præſertim innititur, videlicet *partibus aliquantis ſimilibus duorum numerorum integrorum ſubtrahi poſſe partes aliquotas ſimiles eorundem, quæ ſint numeri integri.* Hujus enim veritas neque ex ſola terminorum notione menti immediate occurrir, neque ex aliis principiis per ſe notis, ut recta exigit methodus, ab Euclide demonſtratur. Non levem poſtremo menti ingerit ſcrupulum Euclidæa partis aliquantæ definitio, eam ſcilicet *partes* eſſe, non vero *partem* ejus, cujus dicitur pars; ſi nomine partis non unitas, ſed numerus, ut ipſam Euclides definit, intelligatur. *Quinarius* namque numerus pars eſt aliquanta *ſeptenarii*, & tamen *quinarius* non continet partes aliquotas *ſeptenarii*, quæ integri ſint numeri. Neque juvat reponere, nomine partium aliquotarum, quæ in parte nume-

ri

 104

ri aliquanta contineri ab Euclide dicuntur, unitates quandoque intelligi. Etenim ſi unitas eſt pars numeri aliquota: ergo non omnis pars numeri aliquota, ſecus ac ipſe dicat Euclides, numerus eſt. Si vero non omnis pars numeri aliquota eſt numerus: ergo hujuſmodi pars generatim ſumta minus recte numerus ab Euclide vocatur. Adde, etiam in parte numeri aliquota, ſi ipſa quoque neceſſario ſit numerus, plures unitates comprehendi; proinde eodem jure ipſam ſimiliter *partium* nomine ab Euclide deſignari debuiſſe.

Ut igitur ingenue fatear, PRINCEPS EMINENTISSIME, hac de re quid ſentiam, dico, nullam in ſuis Arithmeticæ libris de fractis numeris mentionem ab Euclide fuiſſe factam, ſed illum pro certo & evidenti habuiſſe, omnem numeri partem eſſe numerum integrum, ex eo quod unitatem, atque adeo etiam numerum ſummus ille Geometra in abſtracto dumtaxat expenderit. Cum enim *unum* dicatur, tum quod omnino indiviſibile eſt, tum

quod diviſibilitate pollet, unitas ſumta in abſtracto, quemadmodum ſpecificam naturam ſubjecti, quod dicitur unum, non involvit, eodem jure partes non includit, propterea ne mente quidem in minutias, quæ fracto numero exprimuntur, dividi poteſt. Hac igitur de cauſa altum eſt apud Euclidem de fractis numeris ſilentium: illudque principium, veluti ex terminis notum, Vir ſummus in ſua demonſtratione aſſumpſit, *partibus* videlicet *aliquantis ſimilibus duorum numerorum integrorum ſubtrahi poſſe partes aliquotas ſimiles eorundem, quæ itidem ſint numeri integri*. Enimvero ſi numerus in abſtracto ſpectatus nullam fractionem admittit, alterutrum neceſſario dicendum eſt, aut ſcilicet in partibus aliquantis ſimilibus duorum numerorum partes aliquotas ſimiles ipſorum non includi; quod veritati, ut infra oſtendam, conſonum non eſt: vel partes illas aliquotas partibus aliquantis ſubtractas, eſſe numeros integros, ut Euclides ſupponit.

At quoniam contra hæc reponere quis

poſ-

poſſet, magnitudinum dumtaxat in infinitum diviſibilium proprium eſſe, ut partibus earundem aliquantis ſimilibus demi queant partes aliquotæ ſimiles, quæ ejuſdem ſint indolis cum ſuo toto; ac proinde numericis magnitudinibus in abſtracto ſpectatis id nullatenus convenire, ut earum diviſibilitati certi præſcripti ſint fines, impoſiti mihi muneris ratio poſtulat, ut rem altius repetam, præſertim cum, etiamſi numerus in abſtracto conſideretur, non omnia, quæ Euclideæ demonſtrationi ſuperiori loco objecta ſunt, diluantur. Arbitror itaque, ad mentem non eſſe Euclidis, ut unitas a ſerie minimorum terminorum excludatur. Neque enim eo adduci poſſum, ut credam, tantum Virum latuiſſe, non modo Propoſitionem ipſam plerumque fallere, ſi uterque terminus minimus in genere proportionis *multiplicis* ponatur multitudo ex unitatibus compoſita; verum etiam aut ejus demonſtrationem palmari vitio laborare, aut quam tradidit, partis aliquantæ definitionem plane

cor-

Digitized by Google

corruere. Adeo enim evidens eſt, ea in hypotheſi minimis numeris ſubtrahi poſſe partes aliquotas ſimiles majorum numerorum, quin ipſimet numeri in ratione *multiplici* deſinant eſſe minimi, quemadmodum etiam partem aliquotam numeri, ex qua ſimul cum alia, vel aliis, pars ejuſdem numeri aliquanta conſurgit, quandoque unitatem eſſe, ut neutrum a nemine in dubium vocari queat. Non nego tamen, definitionem partis numeri aliquotæ ab eo traditam, minus rectam alicui idcirco videri poſſe, quod unitati illa minime conveniat. Verum puto, hujuſcemodi difficultati fieri ſatis, ſi dicatur, Euclidem eo in loco definitionem non cujuſvis partis numeri aliquotæ, ſed ejus tantum, quæ numerus itidem eſt, tradidiſſe. Si unitas tamen pro altero minimorum terminorum in genere proportionis *multiplicis* habeatur, aliquid faceſſit negotii definitio ipſa numeri. Videtur enim vel numerus non eſſe multitudo ex unitatibus compoſita, ut ipſum explicat Eucli-

clides, vel unitas a ſerie minimorum numerorum, juxta Euclidem, eſſe rejicienda. Dico ergo, unitatem quidem non eſſe numerum; at numerum dici poſſe, dum alteri numero comparatur; neque id eſſe ab Euclidis mente alienum. Is enim dum numerum vocat multitudinem ex unitatibus compoſitam, ſumit numerum *ſecundum ſe*, ſive *abſolute*, & in hoc ſenſu unitas apud ipſum non eſt numerus. At dum agit de minimis numeris, eos omnes terminos *numerorum* nomine deſignat, quorum unus rationem aliquam ad alterum habere poteſt, cujuſmodi certe eſt etiam unitas. Nemo quippe ignorat, uſum eſſe in Matheſi vetuſtiſſimum, a priſcis etiam Mathematicis uſurpatum, ut ſpecies proportionis *multiplicis* determinentur per rationem numeri rationalis integri ad unitatem, & viciſſim ſpecies proportionis *ſubmultiplicis* per rationem unitatis ad numerum rationalem itidem integrum: quod proculdubio haud recte factum ab illis fuiſſet, & nunc etiam fieret, ſi

unitas pro altero proportionis termino , atque adeo pro minimo numero, cum de his agitur, haberi nequiret. Hinc Cl. Volfius numerum vocat, *quidquid refertur ad unitatem, ut recta linea ad aliam rectam* (*); qua admiſſa notione numeri, non tantum multitudo unitatum, verum etiam unitas ipſa, ejuſque fractiones numeri nomen jure ac merito ſibi vindicant, quatenus nempe tam multitudo unitatum, quam ipſa unitas, ac quævis fractio ad unitatem, quemadmodum una recta linea ad aliam rectam referri, eique comparari poſſit.

Verum etſi detur, etiam apud Euclidem alterum minimorum numerorum in genere proportionis *multiplicis* eſſe unitatem, ne ſummus ille Geometra hac in re tam alte deceptus fuiſſe dicatur, videlicet dum laudatam Propoſitionem, veluti univerſaliter veram, demonſtrandam ſuſcepit, quæ univerſaliter vera non eſt, ejus tamen ratiocinium non videtur ab omni labe pur-

(*) Arith. § 10. Tom. I. Elem. Mathem. *Edit. Genevenſis* anno 1732.

104

purgari poſſe. Vel enim putavit, de minimis quibuſcumque numeris, in omni ſcilicet proportionis genere oſtendendum eſſe, eos habere non poſſe rationem partium aliquantarum ſimilium, vel ab hac lege numeros excipiendos eſſe credidit, qui ſunt minimi in genere proportionis *multiplicis*. Si hoc alterum placeat: certe in eo peccavit, quod caſum non diſtinxerit; neque demonſtraverit, minimos numeros in hoc proportionis genere eſſe partes aliquotas ſimiles numerorum ſibi proportionalium, ſed pro evidenti, atque ex terminis noto id habuerit, quod tamen hujuſmodi non eſt, ut infra patebit. Sin autem primum: quamvis in aliis proportionum generibus ipſius demonſtratio locum habeat, oſtenſo principio, cui illa innititur, loquendo tamen de minimis in proportione *multiplici*, Euclides haud dubie culpabilis eſt. Cum enim natura *apogogicæ* demonſtrationis in eo conſiſtat, ut poſito contrario ejus, quod probandum nobis eſt, tamquam vero, aliquid colligatur datæ

poſi-

poſitioni omnino repugnans, ut inde ipſa poſitio falſa appareat, ac proinde verum, quod hujuſmodi erat oſtendendum, neceſſe eſt in hoc demonſtrationi genere, ut quod datæ poſitioni opponitur, *directe* probari non poſſit, neque ipſa poſitio ex terminis falſa appareat. Conſtat autem, ex ſola terminorum notione, unitatem nec eſſe, neque concipi poſſe ſub ratione partis aliquantæ integri numeri ſibi *homologi*. Conſtabit quoque, Propoſitionem ipſam in hoc proportionis genere directe oſtendi poſſe. Ergo perperam, minimi numeri in genere proportionis *multiplicis* ceteros omnes ſibi proportionales ex æquo metiri, *ab abſurdo* demonſtrantur. Si quis vero dicat, id ex eo dumtaxat ab Euclide factum fuiſſe, ut generalem propoſiti theorematis demonſtrationem traderet, hujuſmodi ſcilicet, quæ omnes omnino caſus complecteretur: contra eſt; quia cum ex unitate, quamvis ponatur pars numeri aliquanta, ſubtrahi nequeat pars, quæ ſit numerus integer, Euclidæa demon-

ſtratio

 108

ſtratio nullatenus caſum continet, in quo alter minimorum terminorum ſit unitas; ſed eos tantummodo, in quibus uterque minimus terminus plures unitates complectatur, quatenus nempe hujuſcemodi minimis numeris, ſi ponantur partes aliquantæ ſimiles numerorum ſibi proportionalium, ſubduci poſſunt partes eorundem numerorum aliquotæ ſimiles, quæ ſint numeri integri, ut infra oſtendam, & in ipſa demonſtratione veluti principium certum, & cuique notum aſſumitur.

Duo itaque caſus mihi diſtinguendi videntur, alter ſcilicet, in quo unitas rationem habeat minimi termini; alter vero, in quo minimus uterque terminus plures unitates contineat. In primo caſu vel dandum non eſt Adverſario, minimos numeros concipi poſſe ſub ratione partium aliquantarum ſimilium numerorum ſibi proportionalium, ex eo nimirum, quod idea partis aliquantæ unitati aperte repugnet; vel aliunde, quam ex partibus aliquotis ſimilibus, quæ minimis ipſis ter-

minis

minis ſubtrahantur, demonſtrari debet minimos numeros rationem partium aliquantarum ſimilium habere non poſſe, quod ſcilicet utraque illa pars minimis ipſis ſublata concipi nequeat veluti numerus integer. In altero vero caſu admitti quidem poteſt hypotheſis partium aliquantarum ſimilium, nempe minimos numeros eſſe partes aliquantas ſimiles numerorum, qui eadem cum illis ratione donantur; verum tunc oportet oſtendere principium, quod ad hanc adverſarii poſitionem evertendam in ipſa demonſtratione aſſumitur, *minimos* ſcilicet *numeros habere non poſſe rationem partium aliquantarum ſimilium, quin detrahi illis queant partes aliquotæ ſimiles numerorum ſibi proportionalium, quæ ſint numeri integri.*

Cum itaque primus caſus ſit tantum de minimis numeris in ratione *multiplici*, hoc, vel alio haud diſſimili ratiocinio oſtendi poteſt propoſitio. Sint duo minimi numeri a, b, & duo ſibi proportionales A, B. Eſto autem $b = 1$. Quoniam igitur

igitur ex hypotheſi habetur $a . b \sqsubseteq \mathcal{A} . B$, erit etiam $a . \mathcal{A} \sqsubseteq b . B$ (*). *Submultiplex* autem eſt ratio termini b ad terminum B; cum b ſit unitas, & B numerus integer. Ergo *ſubmultiplex* quoque erit ratio termini a ad terminum $\mathcal{A}$; atque adeo duo termini a, b erunt partes aliquotæ ſimiles duorum $\mathcal{A}$, B, ſeu, quod perinde eſt, duo minimi a, b binos ſibi proportionales $\mathcal{A}$, B ex æquo metientur.

Quod vero attinet ad alterum caſum: ut pateat veritas principii ab Euclide in ſua demonſtratione aſſumti, oſtendam generaliter, *proprium eſſe duorum integrorum numerorum, qui ſint partes aliorum aliquantæ ſimiles, ut integros alios numeros, qui ſint partes aliquotæ ſimiles eorundem, complectantur.* Hoc enim poſito principio, nemo amplius inficiari poterit, *duos minimos numeros munus obire non poſſe partium aliquantarum ſimilium, quin duo integri numeri illis detrahi queant, qui ſint partes aliquotæ ſimiles eorum, quorum ipſi minimi ponuntur partes aliquantæ.*

(*) Lib. V. prop. 16.

Itaque duo numeri p, q ſint partes aliquantæ ſimiles duorum numerorum P, Q. Certum in primis eſt, ſi numeri partiales p, q ex æquo ſubducantur, quoties poteſt, totalibus P, Q, aliquod utrobique futurum eſſe reſiduum, minus ipſis p, q. In hoc enim poſita eſt natura partis aliquantæ, ut ſcilicet aliquoties ſumta ſuum totum plane non expleat. Certum eſt etiam, hujuſcemodi reſidua totalibus ipſis numeris P, Q eſſe proportionalia, nimirum poni non poſſe $P . Q \asymp p . q$, quin itidem habeatur $P - p . Q - q \asymp P . Q$(*), nec non $P - mp . Q - mq \asymp P . Q$, ſumta magnitudine m pro numero coefficiente, ſeu exprimente, quoties minores numeri p, q in majoribus ſibi proportionalibus P, Q adæquate contineantur. Quandoquidem eſt $mp . mq \asymp p . q$ (**); adeoque etiam $mp . mq \asymp P . Q$; cum jam ſit ex hypotheſi $p . q \asymp P . Q$. Nemo quoque inficiabitur, in ablatione reſidui a parte aliquan-

ta,

(*) Lib. V. prop. 19.
(**) Ibidem prop. 15.

 110

ta, & hujus reſidui, ſi quod ſupereſt, a reſiduo priori, atque ita deinceps, fieri non poſſe progreſſum in infinitum, ſi de integris rationalibus numeris loquamur. Cum enim numerus quicumque rationalis integer a finita unitatum multitudine non differat, & reſiduum, quod in alterna illa detractione relinquitur, continuo minuatur, neceſſe eſt, ut per iteratam ſubtractionem numerus totalis exhauriatur tandem & evaneſcat. Pro comperto demum habeo, in alternis hiſce detractionibus contingere nullatenus poſſe, ut vel ad fractionem, vel ad unitatem in utroque termino deveniatur. Non ad fractionem; quia, cum numeri omnes ponantur integri, reſidua quoque ſemper erunt integri numeri. ſecus numerus integer ex integro fractoque ſimul unitis conſurgeret; quo certe nihil abſurdius. Neque ad unitatem; enimvero cum reſidua ſint directe inter ſe, ut totales ipſi numeri, quemadmodum ipſi totales numeri ſunt inæquales, reſidua quoque ſemper debent eſſe inæqualia, cu-

juſmodi non ſunt unitates. Hiſce poſitis, eſto

$P - 4p = m.$ $\quad Q - 4q = n.$
$p - 3m = x.$ $\quad q - 3n = y.$
$m - 2x = 0.$ $\quad n - 2y = 0.$

Cum igitur ex facta hypotheſi habeatur $P.Q = p.q$, erit $P - p.Q - q = P.Q = p.q$ (*) Eſt autem $4p.4q = p.q$ (**) Ergo erit quoque $P - 4p.Q - 4q = P.Q = p.q$. Sed poſuimus $P - 4p = m$, & $Q - 4q = n$. Ergo erit etiam $m.n = P.Q = p.q$. Eodem modo demonſtratu difficile non erit, eſſe $p - 3m.q - 3n = P.Q = p.q$, ſive $x.y = P.Q = p.q$. Igitur integri numeri x, y ſunt partes ſimiles tam numerorum totalium P, Q, quam numerorum, qui ſunt partes eorundem aliquantæ ſimiles, p, q. Porro cum ſit $P - 4p = m$, ſeu $P = 4p + m$, nec non $p - 3m = x$, ſive $p = 3m + x$, erit $P = 12m + 4x + m$; cumque ſit $m = 2x$, erit $P = 24x + 4x + 2x = 30x$. Simili ratione demonſtrabitur, eſſe quoque

(*) Lib. V. prop. 19.
(**) Ibidem prop. 15.

que $Q = 24y + 4y + 2y = 30y$. Quamobrem numeri x, y ſunt partes non modo ſimiles, verum etiam aliquotæ numerorum P, Q, atque adeo etiam numeri $6x$, $6y$ erunt partes itidem aliquotæ ſimiles eorundem P, Q, ex eo nimirum quod ſit $5 \times 6x = 30x = P$, & $5 \times 6y = 30y = Q$. Numerus autem $= 6x$ eſt pars numeri $= p$, ſicuti etiam numerus $= 6x$ eſt pars numeri $= y$; cum jam ſit per hypotheſim $p = 3m + x = 7x$, & $q = 3n + y = 7y$. Ergo numeris p, q, ſive partibus aliquantis ſimilibus numerorum P, Q ſubtrahi queunt partes aliquotæ ſimiles ipſorum P, Q, nimirum partes p, q, quæ ſunt integri numeri; ſtatque propterea, proprium eſſe partium aliquantarum ſimilium duorum integrorum numerorum, ut partes aliquotas ſimiles eorundem, quæ integri quoque ſint numeri, complectantur.

Hinc nemo poteſt jure contendere, minimos numeros a, b eſſe partes aliquantas ſimiles duorum numerorum A, B, quin fateri cogatur, partes aliquotas ſimiles eorun-

rundem *A*, *B*, quæ ſint numeri integri, in ipſis minimis *a*, *b* contineri, atque adeo quin utramque partem *m*, *n* pro integro numero habeat. Quandoquidem ſi minimi numeri habere poſſunt rationem partium aliquantarum ſimilium, illis quoque tribuendum eſt, quod partibus aliquantis ſimilibus neceſſario convenit; vel ſi minimis numeris id competere nequit, quod in notione partium aliquantarum ſimilium neceſſario involvitur, conſectarium eſt, ut non partes aliquantæ, ſed aliquotæ ſimiles eorum omnium numerorum, qui eadem ratione pollent, minimi ipſi dicantur. Hinc pro Euclide inſtaurari ſic poteſt argumentum: minimis numeris ſubduci nequeunt duo alii integri numeri, qui ſint partes aliquotæ ſimiles eorum omnium numerorum, qui ſunt ipſis minimis proportionales: ergo numeri minimi non ſunt partes illorum aliquantæ. Conſtat autem, aliud non extare partium genus, quod aliquotas inter, & aliquantas medium locum ſibi vindicet. Igitur minimi numeri

ſunt

ſunt partes aliquotæ ſimiles eorum omnium numerorum, qui ſibi in ſua ratione reſpondent; hoſque omnes propterea minimi ipſi metiuntur.

Reliquum eſt, ut rationem reddam, cur pars aliquota non *partes* vocetur, ut aliquanta, etſi ea quoque plures ejuſdem numeri partes aliquotas, nempe unitates, plerumque contineat. Obſervandum itaque eſt, partem numeri aliquotam, licet ex pluribus unitatibus ſit compoſita, ſi ad numerum, cujus eſt pars, referatur, *unitatis* inſtar ſpectari poſſe. Illius enim ratio ad ipſum numerum nullatenus ab ea differt, quam habet unitas ad numerum, in quo toties unitas ipſa contineatur, quoties *pars* illa aliquota in ſuo totali numero comprehenditur. Sane quemadmodum 3. *ter* continet unitatem, eſtque ad illam in ratione *tripla*, ſic 12. *ter* complectitur 4., eandemque rationem, *triplam* ſcilicet, ad illum habet, ut proinde ſit $\frac{3}{1} = \frac{12}{4} = 3$.
Quaternarius propterea numerus, ſi *duodena-*

Digitized by Google

ris comparetur, nihil profecto prohibet, quominus veluti unitas talis indolis habeatur, quæ ter ſumta *duodenarium* ipſum conſtituat, non ſecus ac ſimplex unitas totidem ſumta *ternarium* efficit. At vero oppoſitum accidit, ſi de parte numeri aliquanta loquamur. Cum enim pars aliquanta, aliquoties ſumta, ſuum totum adæquate non expleat, *unitatis* inſtar conſiderari nequit, ſed neceſſario ſpectanda eſt, veluti plures ſui totius aliquotas partes complectens, nempe ſub ea ratione, ut plures ſaltem unitates in ea diſtinguendæ ſint, & ſub ratione plurium partium conſiderandæ. Merito igitur optimoque jure partem numeri aliquotam, licet plerumque ex aliis pluribus itidem aliquotis ſit compoſita, non *partes*, ſed *partem* Euclides dixit; contra vero partem numeri aliquantam non *partis*, ſed *partium* nomine deſignandam fuiſſe cenſuit.

Ceterum quoniam præcipua ipſa Propoſitio non omnino in Arithmetica negligenda eſt, quæque hactenus dixi, ut Eucli-

clideæ ejuſdem demonſtrationi vim ſuam tribuerem, nimis moleſta alicui videri poſſunt, liceat mihi, PRINCEPS EMINENTISSIME, aliter quam ab Euclide factum eſt, propoſitionem ipſam oſtendere. Sint ergo duo numeri a, b in ſua ratione minimi, quibus duo alii A, B in eadem ratione reſpondeant. Igitur cum ex hypotheſi ſit $A . B \sqsubseteq a . b$, erit ſimiliter $ma . mb \sqsubseteq a . b \sqsubseteq A . B$ (*); ac proinde

$$A - a . B - b \sqsubseteq A . B - a . b .$$
$$A - 2a . B - 2b \sqsubseteq A . B \sqsubseteq a . b .$$
$$A - 3a . B - 3b \sqsubseteq A . B \sqsubseteq a . b .$$

& ſic deinceps(**). Minimis ergo a, b ablatis ex æquo a majoribus ſibi proportionalibus A, B, quoties poteſt, vel aliquid utrobique tandem relinquitur, minus dubio procul ipſis a, b; vel nihil omnino ſupereſt. Si hoc alterum: igitur minimi a, b metiuntur majores ſibi proportionales A, B; cum ſint hoc ipſo partes eorum aliquotæ ſimiles. Sin primum: numeri minores

(*) Lib. V. prop. 15.
(**) Lib. V. prop. 19.

Digitized by Google

nores ex illa ſubtractione reſidui ſint x, y, eſto nimirum $A - 3a = x$, $B - 3b = y$. Ergo erit $x . y = A . B = a . b$. Eſt autem $x < a$, $y < b$, & utrumque reſiduum x, y eſt numerus integer. Itaque duo a, b contra poſitionem non ſunt in ſua ratione mi-nimi. Nihil ergo ex illa ſubtractione ſupereſſe poteſt; ſtatque propterea, minimos numeros metiri ceteros omnes, qui eadem cum illis ratione donantur.

Jam vides, CARDINALIS AMPLISSIME, hujuſmodi demonſtrationem nulli principio inniti, quod vel ex terminis evidentiſſime cuique non pateat, vel ex aliis per ſe notis manifeſte non deducatur; neque ſuſpicari quempiam poſſe, ex una tantum parte aliquid in illa ſubtractione relinqui; aut poſſe fieri, ut ex una parte ad numerum integrum, ad unitatem ex altera deveniatur. Utrumque enim a vero plane abhorret. Primum quidem; quia admitti nequit $A - ma = x$, $B - mb = y$ quin ratio numeri A ad numerum a diverſa ab ea ſit, quam habet numerus B ad nu-

numerum *b*. Ratio quippe numeri *A* ad numerum *a* non eſt *multiplex*, cujuſmodi eſt ratio numeri *B* ad numerum *b*. Non poteſt autem eſſe $A \cdot a > B \cdot b$, quin itidem ſit $A \cdot B > a \cdot b$ (*) contra hypotheſim. poſuimus enim $A \cdot B = a \cdot b$. Ergo contingere nequit, ut in illa ſubtractione minimorum numerorum *a*, *b* ex majoribus ſibi proportionalibus *A*, *B* ex una tantum parte aliquid relinquatur. Alterum quoque veritati conſentaneum non eſt; quia, cum reſidua *x*, *y*, ſi quæ ſint, eandem inter ſe rationem habeant, quam duo minimi numeri *a*, *b*, ſi reſiduum *x* ponatur numerus integer, unitas vero reſiduum *y*, quemadmodum reſiduum *x* erit in ratione *multiplici* ad reſiduum *y*, ita in eadem ratione erit minimus numerus *a* ad minimum *b*; atque adeo duo *a*, *b* non erunt in ſua ratione minimi. In hoc enim proportionis genere alter minimorum terminorum neceſſario eſt unitas, ut ex

iis

(*) Pappus Lib. VII. Collect. Mathematic. prop. 5. Euclides ex Campano lib. V. prop. 27.

iis, quæ ſuperiori jam loco dicta ſunt, ſatis aperte conſtat. Minimi ergo numeri, ut perſpicuum eſt, eos omnes æque metiuntur, qui minimis ipſis in eadem ratione reſpondent. Et hinc eſt, numeros, qui in ſua ratione non ſunt minimi, ex minimis ejuſdem proportionis eſſe compoſitos, ſique ad minimos ipſos referantur, *multiplicem* ad eos rationem habere. Id enim ex eo aperte ſequitur, quod numeri in ſua ratione minimi ſint partes aliquotæ ſimiles eorum omnium, qui eadem cum ipſis minimis ratione donantur.

Illud demum, PRINCEPS EMINENTISSIME, adjiciendum cenſeo, Euclidis Propoſitionem, quam hactenus, Te jubente, diſcuſſi, ceteraſque omnes, quæ circa minimos numeros verſantur, locum in fractis non habere. cujus quidem ratio eſt; quia in hoc numerorum genere duo inveniri nequeunt, qui in ſua ratione ſint minimi. Cum enim fractio eo minor evadat, quo, manente eodem numeratore, in plures, adeoque exiliores minutias unitas

tas ipſa dividitur, ſeu, quod perinde eſt, quo magis fractionis denominator augetur, quemadmodum poteſt denominator duarum fractionum ejuſdem nominis in infinitum creſcere, quin earum numeratores ullam viciſſitudinem in quantitate ſubeant; ita poſſunt duæ fractiones minui in infinitum, quin earum ratio mutetur, ſi nimirum, iiſdem numeratoribus manentibus, penes quos fractorum numerorum ratio unice ſpectatur, communis ipſorum denominator continuo major fiat. Nulli ergo ſunt, nec eſſe poſſunt numeri fracti in ſua ratione minimi; ac proinde quæ de minimis traduntur, fractis nullatenus competere poſſunt. Hinc eſt etiam, nullos eſſe fractos numeros, qui *primi* vocari poſſint, ſicuti ex adverſo, ſi ſtemus in integris, extant, quibus primorum nomen jure debetur. Sunt enim *primi*, quos unitas tantum metitur, quatenus nempe, cum unitas omnium integrorum numerorum principium ſit atque origo, merito cenſendi ſunt *primi*, qui ex illa im-

me-

mediate derivant. At vero cum nulla ſit fractio, quæ ceterarum principium dici poſſit, nulli ſunt ex fractis, qui veluti omnium *primi* haberi queant.

Itaque ut omnia paucis complectar, cenſeo (etſi meum judicium quantæ infirmitatis ſit, ipſemet diſſimulare nequeam) *Propoſitionem* 21. *lib. VII.*, ſi minimus uterque terminus ex pluribus unitatibus conſtare dicatur, quandoque fallere, ejuſque demonſtrationem mancam prorſus eſſe, & imperfectam. Plerumque fallit Propopoſitio, quòd minimi quamplures numeri tunc non omnes metiantur, qui ſibi in ſua ratione reſpondent. Demonſtratio manca eſt, & imperfecta, utpote principio innixa oſtendendo ab Euclide, non ſupponendo; cum ei ſufficiens ex terminis evidentia deſit. Si vero alter minimorum terminorum in genere proportionis *multiplicis* ponatur unitas, equidem fateor, Propoſitionem ipſam nunquam fallere; at contendo, aliquid, præter generale principium gratis aſſumtum, in ejus

de-

demonſtratione occurrere, ſi generaliter ſumatur, quod plane repugnans eſt, unitati ſcilicet detrahendam eſſe partem aliquotam, quæ ſit numerus integer, ut unitas ipſa numerum ſibi *homologum* metiri evincatur; ut omittam Propoſitionem ipſam in hoc proportionis genere ab abſurdo oſtendi, quamvis directe facili negotio demonſtrari poſſit. Præterea admiſſa Euclidæa numeri notione, arbitror, aut claudicare definitionem partis numeri aliquotæ, aut non parum vitioſam eſſe definitionem partis aliquantæ. Claudicat definitio partis aliquotæ; cum non ſemper partes aliquotæ, quæ in aliquanta continentur, ſint numeri, cujuſmodi eſſe partem numeri aliquotam, Euclides in illius definitione declarat. Vitioſa vero eſt definitio partis aliquantæ, quatenus ejuſmodi pars non ſemper partes aliquotas, quæ ſint numeri, ut vult Euclides, comprehendit. Ita quidem ego ſentio; at aliorum erit de hac ipſa quæſtione ſententiam ferre, ac præſertim Sapientiſſimi illius Viri, quem de eadem tri-

ginta quatuor ab hinc annis, CARDINALIS AMPLISSIME, conſuluiſti, qui nimirum apud celebriores Mathematicos noſtræ ætatis talem occupat locum, ut pro ſuo doctrinæ genere plurimum Mathematica diſciplina illi debere fateatur.

Quoniam vero ita me Tua cœpit humanitas, & mira comitas, ut quadam veluti neceſſitate ductus, nequeam quin meas res omnes Tibi committam, Te certiorem facio, Elementa mea Mathematica XVIII. libris comprehenſa, jam pene ad umbilicum eſſe perducta, lucem quoque mactura, ſi ea, PRINCEPS EMINENTISSIME, probaveris. Sed ne Tua morer negotia, finis Epiſtolæ faciendus eſt, modum fortaſſe excedenti. Vale.

Brixiæ IV. Kal. Auguſti Anno 1737.

Digitized by Google